TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
FACULTEIT DER TECHNISCHE NATUURKUNDE
GROEP TRANSPORTFYSICA

Tentamen Fysische Transportverschijnselen voor W (3B470) op maandag 15 maart 2004, 14.00-17.00 uur.

Het tentamen levert maximaal 30 punten op, waarvan de verdeling hieronder is aangegeven.

---

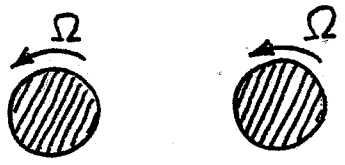
1. Beantwoord de volgende vragen met "ja" of "nee" en geef daarbij een korte argumentatie. Bij een goed antwoord met goede argumentatie krijgt men per vraag 1 punt. Bij een ernstige fout in de argumentatie wordt geen punt toegekend. Voor een correct antwoord zonder argumentatie wordt slechts een $\frac{1}{2}$ punt toegekend.

   (a) Beschouw een twee-dimensionale stroming in het x, y-vlak met snelheidscomponenten $u = \alpha x^2 y$ en $v = -\alpha x y^2$, met α een constante. Kan deze stroming met een stroomfunctie ψ worden beschreven?

   (b) Kan de stroming van onderdeel (a) met een snelheidspotentiaal ϕ worden beschreven?

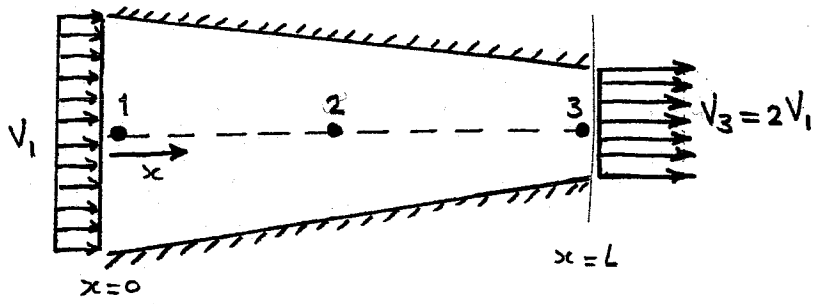
   (c) Is het waar dat voor het stromingsveld van (a) voor het geval van een Newtonse vloeistof de viskeuze schuifspanningen gelijk zijn aan $|4\alpha\mu xy|$?

   (d) Beschouw de stationaire, tweedimensionale stroming opgewekt door twee roterende cilinders (beiden met straal R en hoeksnelheid Ω). Is het waar dat deze stroming één stuwpunt bezit?



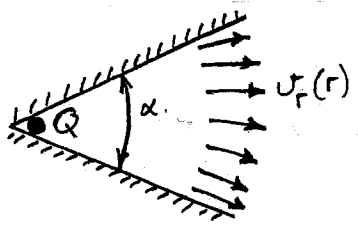
(e) Een handige knutselaar wil een fontein aanleggen in het vijvertje in zijn achtertuin. Hij sluit een pomp met volumedebiet $Q_V = 0,5$ liter/s aan op een slang. Op het vrije uiteinde van de slang plaatst hij een spuitmond met een doorsnedeoppervlak $A = 0,5$ cm^2. Wrijvingseffecten mogen worden verwaarloosd. Lukt het deze knutselaar om een fontein van 5 m hoog te fabriceren?

(f) Beschouw een stationaire niet-viskeuze stroming in een convergerend kanaal, zie schets. De snelheid $u(x)$ neemt lineair

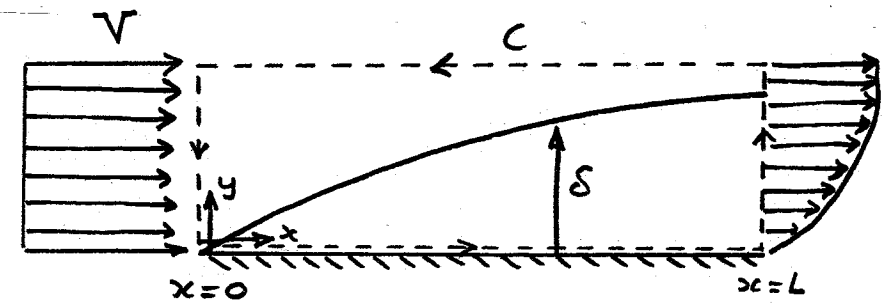


toe van V_1 bij $x = 0$ tot $V_3 (= 2V_1)$ bij $x = L$. Is de versnelling van de vloeistof langs de x-as bij punt 3 ($x = L$) groter dan bij punt 2 ($x = \frac{1}{2}L$)?

(g) Beschouw de tweedimensionale potentiaalstroming tengevolge van een bron met sterkte Q geplaatst in een sector met hoek $\alpha < 2\pi$ tussen twee vaste begrenzingen, zie schets. Is het waar dat de radiale snelheid v_r wordt gegeven door $v_r(r) = \frac{Q}{2\pi r}$?



(h) Aan een vlakke plaat met lengte L, geplaatst in een uniforme parallelstroming, ontwikkelt zich een grenslaag (zie figuur).



Is het waar dat de circulatie Γ berekend langs de gestippelde contour C gelijk is aan VL?

(i) Een torpedo beweegt met constante snelheid $V = 10$ m/s door water ($\rho = 10^3$kg/m^3). Het frontaal aanstroomoppervlak $A_f = 0,1$ m^2. De weerstandscoëfficiënt C_D is gedefinieerd als

$$C_D = \frac{\text{weerstandkracht}}{\frac{1}{2}\rho V^2 \cdot A_f}$$

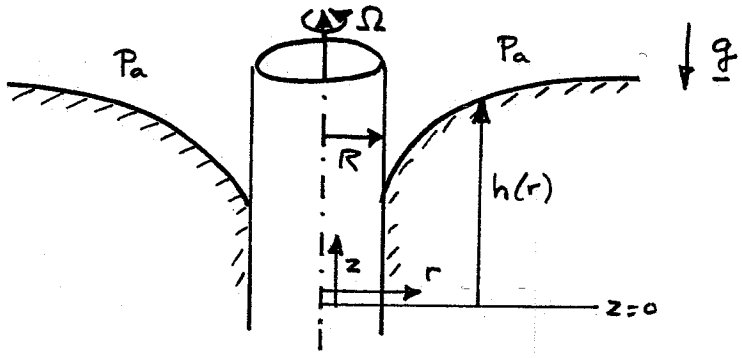
en bedraagt $C_D = 0,1$. Is het waar dat voor de voortstuwing een vermogen benodigd is van ongeveer $P = 5000$ Nm/s $= 5$ kJ/s?

(j) In benadering wordt de snelheidsverdeling $u(x, y)$ in de laminaire grenslaag aan een vlakke plaat gegeven door

$$\begin{aligned} \frac{u}{V} &= \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \quad \text{voor} \quad 0 \leq y \leq \delta \\ &= 1 \quad \text{voor} \quad y \geq \delta \ , \end{aligned}$$

met V de hoofdstroomsnelheid en $\delta(x)$ de lokale grenslaagdikte. Is het waar dat de verplaatsingsdikte $\delta^*(x)$ gelijk is aan $\delta^*(x) = \frac{1}{2}\delta(x)$?

2. Men laat een cilinder met diameter $2R$ verticaal in een viskeuze vloeistof (dichtheid ρ, dynamische viscositeit μ) roteren met constante hoeksnelheid Ω. De vloeistof mag als oneindig uitgestrekt worden beschouwd (vaste begrenzingen bevinden zich op grote afstand). Tengevolge van de roterende cilinder stelt zich een stationaire axisymmetrische stroming in, die niet afhangt van de verticale coördinaat z. Het is handig om een cilindrisch assenstelsel (r, θ, z) te gebruiken, met bijbehorende snelheidscomponenten (v_r, v_θ, v_z). Verder is gegeven dat $v_z = 0$.



(1 pnt) (a) Toon aan dat $v_r = 0$.

(1 pnt) (b) Laat zien (met goede argumentatie) dat de r- en θ-componenten van de Navier-Stokes-vergelijking reduceren tot

$$-\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{1}$$

$$0 = \nu \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} \right] . \tag{2}$$

N.B.: vergelijking (2) kan ook geschreven worden als

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) \right) = 0 . \tag{3}$$

(2 pnt) (c) Formuleer twee randvoorwaarden waaraan de azimutale snelheid v_θ moet voldoen. Leid vervolgens (bv. met gebruikmaking van (3)) de uitdrukking voor $v_\theta(r)$ af.

(1 pnt) (d) Leid ook een uitdrukking af voor de druk $p(r)$.

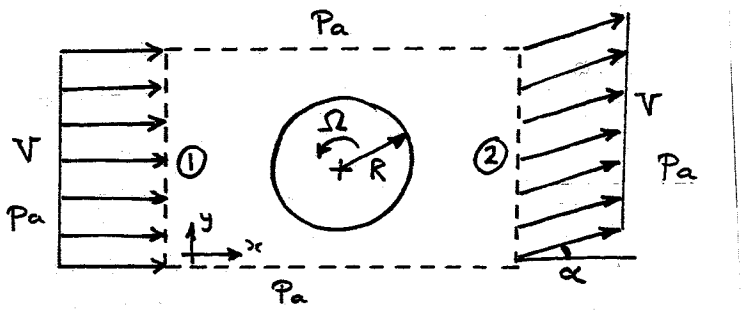
(2 pnt) (e) Laat zien dat uit de z-component van de Navier-Stokes-vergelijking volgt dat er in de vloeistof een hydrostatisch evenwicht heerst, met

$$p = p_a + \rho g(h - z)$$

waarbij $h = h(r)$ het vloeistofniveau beschrijft t.o.v. een referentievlak $z = 0$. Bepaal vervolgens de vorm van het vrije oppervlak, d.w.z. bepaal $h(r)$.

(1 pnt) (f) Bepaal het krachtmoment (per lengte-eenheid) die de vloeistof op de cilinder uitoefent. Welk vermogen moet men leveren om de cilinder met constante hoeksnelheid Ω te laten draaien?

Men haalt de cilinder nu uit de vloeistof en droogt het oppervlak. Vervolgens wordt de cilinder in windtunnel geplaatst waarin een uniforme luchtstroom heerst met snelheid V. Als gevolg van de rotatie van de cilinder neemt men in het zog een afbuiging van de luchtstroming over een hoek α, zie figuur:

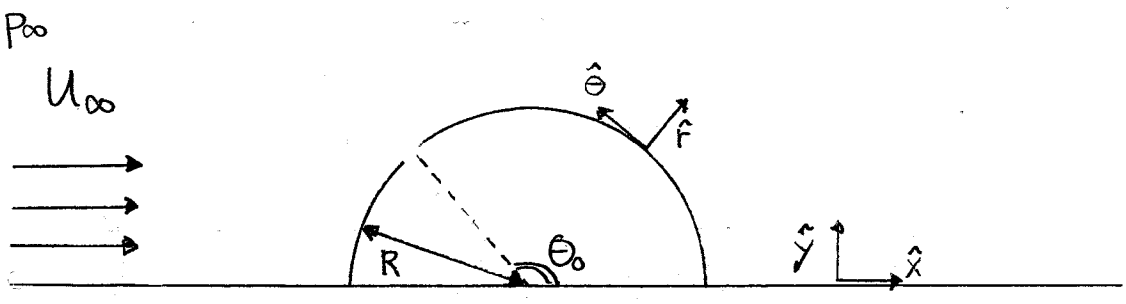


Teneinde de liftkracht op de cilinder af te leiden maken we een *benadering* door de integrale impulsbalans toe te passen op de geschetste contour (gebroken lijn) waarbij we er vanuit gaan dat er door onder- en bovenvlak (de wanden van de windtunnel) **geen** y-impulsfluxen optreden. Verder is gegeven dat de druk overal $p = p_a$ is, en dat zwaartekrachtseffecten verwaarloosbaar zijn.

(2 pnt) (g) Stel onder deze voorwaarden de y-impulsbalans op, en bepaal de liftkracht L die de cilinder ondervindt.

3. Beschouw een opslagruimte in de vorm van een halve cilinder met een straal R zoals geschetst in onderstaande figuur. De lengte L van de schuur is veel groter dan de straal, dus $L \gg R$. De zijden van de opslagruimte zijn hermetisch afgesloten. Dwars op de as van de cilinder blaast een zeer harde wind met een uniforme snelheid U_∞, die uiteraard ver van het gebouw gemeten is. We mogen de stroming gemakshalve als twee-dimensionaal, wrijvingsloos, stationair en onsamendrukbaar beschouwen.
Dit stromingsprobleem is het best te beschrijven met behulp van cilindercoördinaten (r, θ). We geven de radiale en azimuthale snelheidscomponenten aan met, respectievelijk, u en v. De axiale component is nul, dus $\mathbf{u} = (u, v, 0)$. Naast de cilindercoördinaten hebben we ook een cartesisch coördinatenstelsel (x, y) geïntroduceerd zoals in de figuur geschetst.

Gegevens: $R = 5$ m, $L = 30$ m en $U_\infty = 30$ m/s.



(1 pnt) (a) De stroming wordt beschreven met behulp van een potentiaal $\phi = Ar\cos\theta + \frac{B\cos\theta}{r}$, geschreven in cilindercoördinaten zoals gedefinieerd in de bovenstaande figuur. Bepaal A en B.

(1 pnt) (b) Beredeneer in welke vorm de vergelijking van Bernoulli gebruikt mag worden. Speelt de zwaartekracht hierin een rol?

(1 pnt) (c) Geef een uitdrukking voor de snelheid aan de wand en bepaal de druk als functie van θ voor $r = R$.

(3 pnt) (d) De wind oefent een kracht uit op het gebouw. Wat is volgens

de potentiaaltheorie de kracht in de x-richting? De kracht K_y in de y-richting op de wand van het gebouw is mede afhankelijk van de druk aan de binnenzijde. Men besluit deze druk zodanig te kiezen dat de netto kracht in de y-richting nul is. Men doet dat door een opening in het dak te maken onder een hoek θ_0. Welke waarde moet θ_0 hebben zodat $K_y = 0$?

De opening in het dak is weer gesloten. We veronderstellen nu dat wrijving wel een rol speelt. Als gevolg van wrijving zal loslating achter de cilinder optreden en zal een zoggebied ontstaan. De stroming mag als quasi-stationair beschouwd worden. Om de kracht nu te voorspellen worden schaalexperimenten uitgevoerd. De verhouding van de afmetingen van model en werkelijkheid is 1:10. Men zou de experimenten in lucht of water kunnen uitvoeren. We maken gebruik van de volgende gegevens. Voor lucht: kinematische viscositeit $\nu_l = 1,5 \times 10^{-5}$ m^2/s en de dichtheid $\rho_l = 1,2$ kg/m^3. Voor water: $\nu_w = 1 \times 10^{-6}$ m^2/s en $\rho_w = 10^3$ kg/m^3.

(1 pnt) (e) Laat aan de hand van de verhouding van de stationaire traagheidskracht tot de zwaartekracht zien dat het ook nu redelijk is om aan te nemen dat zwaartekrachtseffecten geen rol van betekenis spelen.

(2 pnt) (f) Hoe groot zou men de stromingssnelheid U_∞ in de modelexperimenten moeten kiezen om bij een stationaire wind te voldoen aan de gelijkvormigheidseisen? Bepaal dit voor water en lucht, en becommentarieer de haalbaarheid van deze schaalexperimenten.

(1 pnt) (g) Men vindt uit de schaalmodelexperimenten dat de weerstandscoëfficiënt $C_w = 1,0$. Bereken de kracht die de wind op het gebouw op volle schaal uitoefent. De weerstandscoëfficiënt is betrokken op de dwarsdoorsnede van het gebouw loodrecht op de aanstroomrichting.

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
FACULTEIT DER TECHNISCHE NATUURKUNDE
VAKGROEP TRANSPORTFYSICA

Uitwerkingen Tentamen FTV voor W (3B470) van maandag 15 maart 2004.

1. (a) Ja. Een twee-dimensionale stroming kan met een stroomfunctie ψ worden beschreven als wordt voldaan aan $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$. Aangezien $\frac{\partial u}{\partial x}=2\alpha xy$ en $\frac{\partial v}{\partial y}=-2\alpha xy$ wordt hier aan voldaan.

   (b) Nee. De stroming kan met een snelheidspotentiaal ϕ worden beschreven indien $\omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$. Aangezien $\frac{\partial v}{\partial x}=-\alpha y^2$ en $\frac{\partial u}{\partial y}=\alpha x^2$ wordt hier i.h.a. niet aan voldaan.

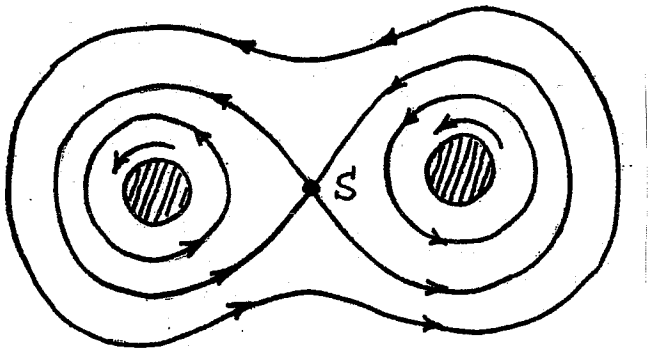
   (c) Nee. De viskeuze *normaal*spanningen worden gegeven door

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} &= 4\alpha\mu xy\\ \sigma_{yy} &= 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} &= -4\alpha\mu xy\ ,\end{aligned}$$

   doch de viskeuze *schuif*spanningen zijn:

$$\sigma_{xy}=\sigma_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\mu\alpha(x^2-y^2)\ .$$

   (d) Ja. Het stroomlijnenpatroon ziet er ongeveer uit zoals geschetst. Tussen de cilinders bevindt zich een stuwpunt S (snijpunt van twee stroomlijnen), alwaar de snelheid gelijk is aan nul.



(e) Ja. Massabalans: $Q_V = VA \rightarrow V = Q_V/A = 10$ m/s. Bernoulli: $\frac{1}{2}\rho V^2 + p_a + 0 = 0 + p_a + \rho g H \rightarrow H = V^2/2g = 100/20 = 5$ m.

(f) Ja. Lineaire snelheid $u(x) = \alpha x + \beta$, dus:

$$u(x) = \left(1 + \frac{x}{L}\right) V_1 \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{V_1}{L} (= \text{constant}) \ .$$

De versnelling langs de x-as:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = u(x)V_1/L \ ,$$

dus op $x = L$: $\frac{Du}{Dt} = 2V_1^2/L$ en op $x = \frac{1}{2}L$: $\frac{Du}{Dt} = \frac{3}{2}V_1^2/L$. De versnelling in punt 3 ($x = L$) is dus groter dan in punt 2 ($x = \frac{1}{2}L$).

(g) Nee. De totale radiale volumeflux is

$$Q = \int_0^\alpha v_r(r) \cdot r d\theta = \alpha r v_r(r) \rightarrow v_r(r) = \frac{Q}{\alpha r} \ .$$

(h) Nee. De circulatie Γ langs de contour C is:

$$\Gamma = \oint_c \underline{v} \cdot \underline{dl} = \int_0^L u(y=0)dx + \int_0^Y v(x=L)dy +$$

$$+ \int_L^0 u(y=Y)dx + \int_Y^0 v(x=0)dy = 0 + 0 - VL + 0 =$$

$$= -VL \ .$$

(i) Ja. De weerstandskracht is $F_w = C_D \frac{1}{2}\rho V^2 A_f = 500$ N. Het benodigd vermogen is dan $P = F_w V = 5000$ Nm/s $= 5$ kJ/s.

(j) Nee, immers

$$\delta^* = \frac{1}{V}\int_0^\infty (V-u)dy = \int_0^\delta \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] dy =$$

$$= \left(y - \frac{1}{3}\frac{y^3}{\delta^2}\right)\Big|_0^\delta = \frac{2}{3}\delta \ .$$

2. (a) Met $\frac{\partial}{\partial\theta} = 0$ en $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ wordt $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ (massabehoud) geschreven als: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) = 0$. Na integratie naar r volgt dan $v_r = C/r$. Met de randvoorwaarde $v_r(r = R) = 0$ blijkt $C = 0$, dus: $v_r = 0$.

(b) De r- en θ-componenten van de Navier-Stokes-vergelijking (zie formuleblad) zijn:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)v_r - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right)$$

waarbij

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla) = v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\ .$$

Met $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ (stationair), $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ (axisymmetrie), $v_z = 0$, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ (gegeven) en $v_r = 0$ (zie onderdeel (a)) volgt dan:

$$-\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{4}$$

$$0 = \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) - \frac{v_\theta}{r^2}\right]\ . \tag{5}$$

(c) Integratie van (3) naar r levert:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv_\theta) = A \quad\rightarrow\quad \frac{d}{dr}(rv_\theta) = Ar\ .$$

Nogmaals naar r integreren geeft

$$rv_\theta = \frac{1}{2}Ar^2 + B \quad\rightarrow\quad v_\theta = \frac{1}{2}Ar + B/r\ .$$

De integratieconstanten A en B worden met de randvoorwaarden $v_\theta(r \rightarrow \infty) = 0$ en $v_0(r = R) = \Omega R$ bepaald: $A = 0, B = \Omega R^2$.
De uitdrukking voor $v_\theta(r)$ is dan:

$$v_\theta(r) = \frac{\Omega R^2}{r}\ . \tag{6}$$

(d) Met (1) volgt nu:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho v_\theta^2}{r} = \frac{\rho \Omega^2 R^4}{r^3} \ , \tag{7}$$

en na integratie naar r:

$$p(r) = p_0 - \frac{\rho \Omega^2 R^4}{2r^2} \quad \text{met} \quad p_0 = p(r \to \infty) \ .$$

(e) Met $v_z = 0$ neemt de z-component van de Navier-Stokes-vergelijking de volgende vorm aan:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \ .$$

Na integratie naar z volgt: $p = -\rho g z +$ constante. De integratieconstante wordt bepaald met de voorwaarde $p(z = h) = p_a$, waarmee men vindt:

$$p = p_a + \rho g (h - z) \ . \tag{8}$$

NB.: Merk op dat $p = p(r, z)$, omdat $h = h(r)$. Substitutie van dit resultaat in de r-component van de Navier-Stokes-vergelijking, ofwel in (7), levert:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho g \frac{dh}{dr} = \frac{\rho \Omega^2 R^4}{r^3} \quad \to \quad \frac{dh}{dr} = \frac{\Omega^2 R^4}{r^3 g} \ .$$

Na integratie naar r volgt:

$$h(r) = -\frac{\Omega^2 R^4}{2r^2 g} + C \ .$$

De integratieconstante C wordt bepaald uit de voorwaarde $h(r \to \infty) = h_0$, waarmee men krijgt:

$$h(r) = h_0 - \frac{\Omega^2 R^4}{2r^2 g} \ . \tag{9}$$

(f) De schuifspanning die de vloeistof op de cilinder uitoefent (zie formuleblad) is:

$$\sigma_{r\theta}(r = R) = \mu r \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)|_{r=R} = \mu r \frac{d}{dr}\left(\frac{\Omega R^2}{r^2}\right)|_{r=R} =$$

$$= -2\mu\Omega \ .$$

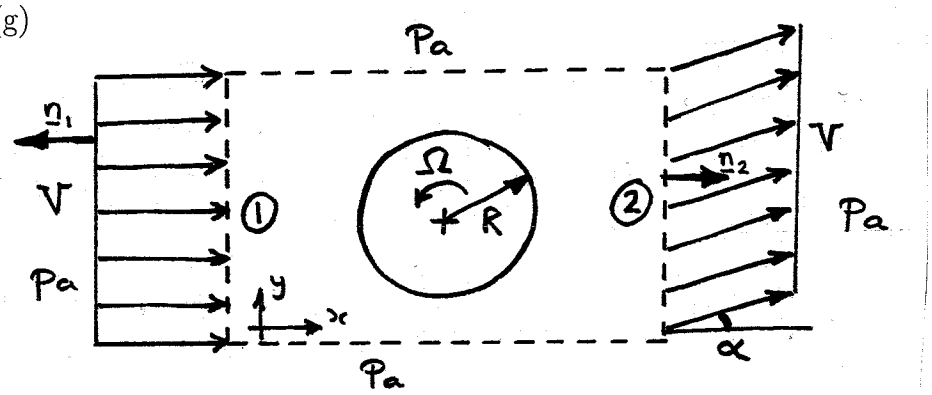
De kracht (per eenheid van cilinderlengte) die de vloeistof uitoefent is dan

$$F = 2\pi R \sigma_{r\theta}(r = R) = -4\pi\mu R\Omega \ .$$

Het benodigd vermogen is:

$$P = |F|\Omega R = 4\pi\mu R^2\Omega^2 \ .$$

(g)



$$\mathbf{n}_1 = (-1, 0) \ , \quad \mathbf{v}_1 = (V, 0) \qquad \rightarrow \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = -V$$
$$\mathbf{n}_2 = (1, 0) \ , \quad \mathbf{v}_2 = (V\cos\alpha, V\sin\alpha) \quad \rightarrow \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = V\cos\alpha \ .$$

De y-impulsbalans vereenvoudigt (geen drukbijdragen) tot:

$$\iint_S \rho v(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dS = F_y \ ,$$

waarbij F_y de y-component van de kracht die de cilinder op de lucht uitoefent. Dit wordt:

$$\iint_{S_1} \rho v_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{n}_1)dS + \iint_{S_2} \rho v_2(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{n}_2)dS = F_y$$

De eerste integraal is nul, en daarmee:

$$F_y = \rho V^2 \sin\alpha\cos\alpha S_2 \ .$$

De liftkracht die de cilinder ondervindt is dan

$$L = -F_y = -\rho V^2 \sin\alpha\cos\alpha S_2 \ .$$

NB.: Met het Kutta-Joukowski-theorema vindt men:

$$L = -\rho V\Gamma = -2\pi\rho V\Omega R^2 \quad (\text{met } \ \Gamma = 2\pi\Omega R^2) \ .$$

3. (a) Er wordt aangenomen dat we te maken hebben met een potentiaalstroming (d.w.z. een rotatievrije stroming). Voor een potentiaalstroming geldt: $\mathbf{u} = \nabla\phi$, met ϕ de potentiaal. In cilindercoördinaten kunnen we dan schrijven: $u = \frac{\partial\phi}{\partial r}$ en $v = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$. Er is gegeven dat $\phi = Ar\cos\theta + \frac{B\cos\theta}{r}$, ofwel:

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial r} = A\cos\theta - \frac{B\cos\theta}{r^2} \ . \tag{10}$$

Op grote afstand van de schuur moet gelden: $r \to \infty$ dan $u = U_\infty\cos\theta$, ofwel $A = U_\infty$. Tevens geldt op het dak van de opslagruimte (op $r = R$) dat $u = 0$ omdat de wand ondoordringbaar is. Dat betekent $U_\infty\cos\theta = \frac{B\cos\theta}{R^2}$ ofwel: $B = R^2U_\infty$. De potentiaal ϕ wordt dus

$$\phi = U_\infty\left(1 + \left(\frac{R^2}{r^2}\right)\right) r\cos\theta \ . \tag{11}$$

(b) De wet van Bernoulli luidt: $\frac{1}{2}\rho V^2 + p + \rho g z =$ constant. Deze wet is geldig als de stroming stationair, onsamendrukbaar en wrijvingsloos is. Hieraan is voldaan. Als bovendien de stroming rotatievrij is, is Bernoulli geldig in het hele domein. Dan zien we direct dat de zwaartekrachtsbijdrage in de wet van Bernoulli niet van belang is zolang we deze wet toepassen bij constante hoogte.

(c) De loodrechte snelheidscomponent aan de wand is nul (hier hadden we bij (a) al gebruik van gemaakt om A en B te bepalen). Voor de snelheidscomponent parallel aan de wand krijgen we

$$\begin{aligned} v(r = R) = \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial\phi}{\partial\theta}|_{r=R} = -A\sin\theta - \tfrac{B\sin\theta}{r^2}|_{r=R} = \\ = -2U_\infty\sin\theta \ . \end{aligned} \tag{12}$$

De druk op het dak van de opslagplaats berekenen we aan de hand van Bernoulli (op constante hoogte): $\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + p_\infty = \frac{1}{2}\rho v^2 + p(\theta)$. Gebruik makend van vergelijking (12) krijgen we

$$p(\theta) - p_\infty = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2(1 - 4\sin^2\theta) \ . \tag{13}$$

(d) De horizontale kracht is altijd nul (paradox van d'Alembert). Binnen in de opslagruimte is de overdruk t.o.v. p_∞ overal $p(\theta_0)$ en op het dak is de overdruk (zie (13)) gelijk aan $p(\theta) = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2(1 - 4\sin^2\theta)$. De kracht van de stroming op het dak van de opslagruimte wordt berekend d.m.v.

$$\mathbf{K} = \int \hat{\mathbf{n}} p(\theta) R d\theta \ , \tag{14}$$

met $\hat{\mathbf{n}} = (-\cos\theta, -\sin\theta)$. Voor K_y volgt dan

$$\begin{aligned} K_y &= -\textstyle\int_0^\pi p(\theta) R \sin\theta d\theta = \\ &= -\tfrac{1}{2} R\rho U_\infty^2 \textstyle\int_0^\pi (1 - 4\sin^2\theta)\sin\theta d\theta \ . \end{aligned} \tag{15}$$

Substitutie van $z = \cos\theta$ in $(1 - 4\sin^2\theta) = (4\cos^2\theta - 3)$ geeft:

$$K_y = -\frac{1}{2} R\rho U_\infty^2 \int_{-1}^{+1} (4z^2 - 3) dz = \frac{5}{3} R\rho U_\infty^2 \ . \tag{16}$$

De druk $p(\theta_0)$ aan de binnenzijde levert de kracht F_y op het dak (let op, nu gebruiken we $\hat{\mathbf{n}} = (\cos\theta, \sin\theta)$):

$$\begin{aligned} F_y &= \textstyle\int_0^\pi p(\theta_0) R \sin\theta d\theta = p(\theta_0) R \int_{-1}^{+1} dz = \\ &= 2p(\theta_0) R = R\rho U_\infty^2 (1 - 4\sin^2\theta_0) \ . \end{aligned} \tag{17}$$

In geval van evenwicht geldt: $K_y + F_y = 0$, ofwel: $(1 - 4\sin^2\theta_0) = -\frac{5}{3}$. De oplossing is: $\sin\theta_0 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Omdat $\sin\theta_0 \geq 0$ krijgen we tenslotte: $\sin\theta_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}$. De opening in het dak kan dus gemaakt worden op $41,81^o$ of op $138,19^o$.

(e) Met het Froudegetal ($Fr = \frac{U^2}{gR}$) kunnen we nagaan of zwaartekrachtseffecten van belang zijn. Als $Fr \gg 1$ dan kunnen we redelijkerwijs veronderstellen dat deze effecten verwaarloosbaar zijn. In ons geval: $Fr = 900/(10 \times 5) = 18 \gg 1$. We mogen zwaartekrachtseffecten dus verwaarlozen.

(f) De stroming is quasi-stationair, dus Sr is niet van belang, en we hebben hierboven beargumenteerd dat zwaartekrachtseffecten op de stroming verwaarloosbaar zijn, dus Fr is niet van belang. In de buurt van de cilinderwand spelen viskeuze krachten een rol. Dus we kunnen ons beperken tot één kental

waarmee het probleem geschaald kan worden, namelijk het Reynoldsgetal. De kentallen in termen van de modelparameters worden aangegeven met de index m. De karakteristieke lengte- en snelheidsschaal zijn respectievelijk R en U_∞. Gelijkvormigheid van de stroming wordt dus bepaald door de conditie:

$$Re = Re_m \quad \rightarrow \frac{U_\infty R}{\nu} = \frac{U_{\infty,m} R_m}{\nu_m} \,, \tag{18}$$

We weten dat $R_m = \frac{1}{10}R$, dus $U_{\infty,m} = 10U_\infty \frac{\nu_m}{\nu} = 300\frac{\nu_m}{\nu}$. Voor een schaalexperiment in water: $U_{\infty,m} = 300\frac{\nu_w}{\nu_l} = 20$ m/s.
Voor een schaalexperiment in lucht: $U_{\infty,m} = 300$ m/s. Echter, dit betekent dat de stroming compressibel zal zijn ($Ma \simeq 0.9$) zodat we direct kunnen concluderen dat zo'n schaalexperiment in lucht niet realistisch is.

(g) De kracht wordt weergegeven door $K = \frac{1}{2}\rho_l c_w A U_\infty^2$, met $A = RL$. Dus $K = 81000$ N.